☐ Completar LU y nombre en el enunciado
☐ **Justificar todas las respuestas**

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Nota
28	23	25	24	100 Aprobado!

1. (a) Sean λ_1 y λ_2 autovalores *distintos* de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovectores asociados x_1 y x_2. Probar que $x_1 + x_2$ no es autovector de A. (8 puntos)

   (b) Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, demostrando o dando un contraejemplo.

   i. Si G es una matriz de Givens distinta a la matriz identidad, entonces G no tiene autovalores reales. (5 puntos)

   ii. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz con autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, entonces $A = 0$. (5 puntos)

   (c) Dar un ejemplo en cada caso (y justificar) de matrices de 2×2 para mostrar que una matriz puede tener:

   i. todos sus valores singulares iguales pero autovalores diferentes entre sí;

   ii. todos sus autovalores iguales pero valores singulares diferentes entre sí.

   Para cada matriz dada como ejemplo, mostrar dos descomposiciones SVD diferentes. (10 puntos)

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con autovalores reales, $b \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \neq 0$. Se propone el siguiente esquema iterativo para resolver el sistema $Ax = b$:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(b - Ax_k)$$

   (a) Probar que si A tiene tanto autovalores positivos como negativos, el sistema no converge para algún x_0 inicial. (11 puntos)

   (b) Supongamos que A tiene únicamente autovalores positivos. Dar condiciones sobre α para que el método iterativo dado converja. (12 puntos)

3. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Para cada $k = 1, \ldots, n$, sea $A_k \in \mathbb{R}^{n\times k}$ la matriz que tiene como columnas a los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$. En el contexto de encontrar la menor distancia entre un vector $b \in \mathbb{R}^n$ y la $Im(A_k)$, definimos $\varphi(k) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^k} \|A_k x - b\|_2$.

   (a) Probar que si $1 \leq s \leq t \leq n$ entonces $\varphi(s) \geq \varphi(t)$. Interpretar geométricamente. (12 puntos)

   (b) Si $n > 1$ y $b = v_n$ encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ para la cual, la resolución de cuadrados mínimos para el sistema $Ax = b$ tiene infinitas soluciones y además $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2 = \varphi(1)$.

   (13 puntos)

4. (a) Sea f un polinomio y $x_0, \ldots, x_n$ puntos distintos. Se sabe que $f[x_0, \ldots, x_n] = 0$. Sea $p(x)$ el polinomio interpolador para f en dichos puntos. Demostrar que si se deja de considerar un punto x_j $(0 \leq j \leq n)$ entonces $p(x)$ sigue siendo el polinomio interpolador para f en $x_0, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$. (12 puntos)

   (b) Dado el spline

$$S(x) = \begin{cases} x^3 & -1 \leq x \leq 0 \\ a + bx + cx^2 + dx^3 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   hallar una función f distinta de x^3 y valores para a, b, c y d, de tal forma que S sea un spline sujeto a f. (12 puntos)

Ejercicio 1

a) λ_1, λ_2 autovalores distintos de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con autovectores x_1 y x_2 asociados. Probar que x_1+x_2 no es autovector de A.

Sabemos que $\begin{cases} Ax_1 = \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$

Supongamos que x_1+x_2 fuese autovector de A con autovalor μ. Entonces:

$$\begin{cases} A(x_1+x_2) = \mu(x_1+x_2) = \mu x_1 + \mu x_2 \\ A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \mu x_1 + \mu x_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$

$\Rightarrow (\mu - \lambda_1) x_1 + (\mu - \lambda_2) x_2 = 0$

Sabemos que como x_1 y x_2 son autovectores asociados a autovalores distintos $\Rightarrow \{x_1, x_2\}$ es LI

Luego, la igualdad anterior se satisface si y sólo si:

$$\begin{cases} \mu - \lambda_1 = 0 \\ \mu - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \mu$$

Absurdo! Pues $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Luego x_1+x_2 no puede ser autovector.

B

b) V o F?

1. G matriz de Givens distinta de la identidad $\Rightarrow$ G no tiene autovalores reales.

11. Si $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz con autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow A = 0$

1) Falso. Una matriz de Givens tiene la forma:

$$G = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

NOTA

Intuitivamente, una rotación de ángulo π, que manda

$$\left.\begin{array}{l}(1,0) \mapsto (-1,0) \\ (0,1) \mapsto (0,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow$$ ~~tienen autovalores~~ son autovectores de autovalor -1!!

y no es la transformación Identidad. Poniendo $\theta = \pi$:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \neq Id$$ y tiene autovalores reales!!

$\Rightarrow$ Es Falso. B (-1 es autovalor seu pues es diagonal)

Veamos que si $\theta \neq k\pi$ entonces efectivamente los autovalores no son reales:

Calculo el polinomio característico. $G - \lambda I = \begin{pmatrix} \cos\theta - \lambda & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta - \lambda \end{pmatrix}$

$$\det(G - \lambda I) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\theta$$
$$= \cos^2\theta - 2\lambda\cos\theta + \lambda^2 + \operatorname{sen}^2\theta$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1$$

El discriminante es:

$$(2\cos\theta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4\cos^2\theta - 4 = 4(\cos^2\theta - 1)$$

luego $\cos^2\theta \leq 1 \Rightarrow 4 \cdot (\cos^2\theta - 1) \leq 0$

La única forma de que tenga raíces reales es que $\cos^2\theta = 1 \Leftrightarrow \cos\theta = \pm 1 \Leftrightarrow \theta = k\pi$ para $k \in \mathbb{Z}$ como queríamos ver.

II) Falso. Por ejemplo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

y como es triangular superior los autovalores son los elementos de la diagonal, que son 0 y 0.

B

NOTA

c) i) Mostrar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ cuyos valores ~~principales~~ singulares sean todos iguales pero autovalores diferentes entre sí.

Tenemos $A = U\Sigma V^t$ con $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = U \cdot \sigma Id \cdot V^t = \sigma U V^t$$

U y V deben ser ortogonales. Si $U = Id \Rightarrow A = \sigma V^t$

Queremos que A tenga autovalores distintos, así que tomamos $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ que es ortogonal (filas ortogonales y de norma 1) y entonces, para $\sigma = 1$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ es diagonal}$$

$\Rightarrow$ sus autovalores son 1 y -1.

Y una descomposición SVD de A es:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

Notemos que otra posible SVD es:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{U} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V^t}$$

B

ii) $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ con sus autovalores iguales pero valores singulares diferentes entre sí.

Voy a buscar una matriz A triangular superior (así los autovalores son los elementos de la diagonal).

$A = \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ Tomo esta matriz A genérica

$$A^t A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2 & ab \\ ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

NOTA

~~...~~ El polinomio característico es:

$$\det(A^tA-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} b^2-\lambda & ab \\ ab & a^2+b^2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a^2+b^2-\lambda)(b^2-\lambda) - a^2b^2$$

$$= \lambda^2 - \lambda\cdot(a^2+2b^2) + \cancel{a^2b^2} + b^4 - \cancel{a^2b^2}$$

Para que las cuentas "sean más lindas" voy a intentar que el discriminante sea un cuadrado perfecto. El discriminante es:

$$(a^2+2b^2)^2 - 4\cdot 1\cdot b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + \cancel{4b^4 - 4b^4}$$

$$= a^2\cdot\underbrace{(a^2+4b^2)}_{\text{quiero que sea cuadrado perfecto}}$$

$$a^2 + (2b)^2 = c^2$$

Uso la terna pitagórica $(3,4,5)$ y tomo

$a=3$, $b=2$ ($\downarrow$ $2b=4$)

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$$ ✓

El polinomio característico de A^tA queda:

$$\lambda^2 - 17\lambda + 16$$ ✓

cuyas raíces son 16 y 1.

$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1^2 = 16 \Rightarrow \\ \sigma_2^2 = 1 \Rightarrow \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix}\sigma_1 = 4 \\ \sigma_2 = 1\end{matrix}}$ $\Big\}$ son distintos

$\downarrow$ los autovalores de A^tA son los σ_i^2

pues $\sigma_1, \sigma_2 \geq 0$ por ser valores singulares

a 2

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A tiene autovalores iguales y valores singulares distintos}}$ ✓

Busco factorización SVD de A.

Las columnas de V las voy a tomar autovectores de A^tA.

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 13 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$ Resuelvo

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 4-1 & 6 & 0 \\ 6 & 13-1 & 0 \end{array}\right)}_{A-1.I} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El espacio autovector asociado es $\langle(2,-1)\rangle$

tomo $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)$
de norma 1

$\underline{\lambda_1 = 16}$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 4-16 & 6 & 0 \\ 6 & 13-16 & 0 \end{array}\right)}_{A-16I} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -12 & 6 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El autoespacio asociado es entonces
$\langle(1,2)\rangle$

tomo $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$ que es ortogonal.

Como $r=2$, los u_1, u_2 están determinados y son:

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{1} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

es una SVD de A.

Para dar otra SVD, podríamos tomar $\tilde{v}_1 = -v_1$ de signo contrario (que teniendo norma 1 y siendo autovector de A^tA). En consecuencia

$$\tilde{u}_1 = \frac{A\tilde{v}_1}{\sigma_1} = -\frac{Av_1}{\sigma_1} = -u_1$$

Entonces otra posible SVD es:

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

B

Gabriel Sac Himelfarb 4/8

(2) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con autovalores reales, $b \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \neq 0$.

$$x_{k+1} = x_k + \alpha(b - A x_k)$$

a) Si A tiene tanto autovalores positivos como negativos $\Rightarrow$ el sistema no converge para algún x_0 inicial

$$x_{k+1} = x_k + \alpha b - \alpha A x_k$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = \underbrace{(I - \alpha A)}_{\text{es la matriz que gobierna la iteración.}} x_k + \alpha b$$

Queremos analizar el radio espectral de $T := I - \alpha A$. Si probamos que es ≥ 1 entonces sabemos por el criterio de convergencia visto en la teórica que el sistema no converge para algún x_0.

Si λ es autovalor de A, entonces $1 - \lambda\alpha$ es autovalor de $I - \alpha A$ pues, sabemos que $\exists x \neq 0$ tq $Ax = \lambda x \Rightarrow$

$$(I - \alpha A)x = x - \alpha A x = x - \alpha\lambda x = (1 - \alpha\lambda)x$$

$\Rightarrow x$ es autovector ($x \neq 0$) de autovalor $1 - \alpha\lambda$

Caso 1 Si $\alpha > 0$ tomemos λ un autovalor negativo de A (existe por enunciado) $\Rightarrow$ $1 - \underbrace{\alpha\lambda}_{<0} = 1 + \underbrace{(-\alpha\lambda)}_{>0} > 1$

$\Rightarrow \rho(I - \alpha A) > 1$ pues tiene el autovalor $1 - \alpha\lambda$ de módulo > 1.

Si $\alpha < 0$ tomemos λ un autovalor positivo de A (existe por enunciado)

$$\Rightarrow 1 - \alpha\lambda = 1 + \underbrace{(-\overset{<0}{\alpha}\overset{>0}{\lambda})}_{>0} > 1$$

$\Rightarrow \rho(I - \alpha A) > 1$

En cualquier caso, $\rho(I - \alpha A) > 1 \Rightarrow$ el sistema no converge para algún x_0

B

b) Suponemos que A tiene sólo autovalores positivos. Dar condiciones sobre α para que el método iterativo converja.

Sea μ autovalor de $I-\alpha A$. $\Rightarrow \exists x \neq 0$ tq

$$(I-\alpha A)x = \mu x \Rightarrow x - \alpha A x = \mu x$$
$$\Rightarrow \alpha A x = x - \mu x$$
$$\Rightarrow \alpha A x = (1-\mu)x$$
$$\Rightarrow A x = \frac{1-\mu}{\alpha} x. \quad (\alpha \neq 0)$$

$\Rightarrow \frac{1-\mu}{\alpha}$ es autovalor de A.

Para que el sistema iterativo converja, necesitamos que el $\rho(I-\alpha A) < 1$. Buscamos entonces que para todo μ autovalor de $I-\alpha A$, $|\mu| < 1$.

~~Todos los autovalores de A son positivos~~ $\cancel{\Rightarrow}$

$$\cancel{\frac{1-\mu}{\alpha} > 0}$$

~~Caso 1~~ $\cancel{\alpha > 0 \Rightarrow 1-\mu > 0 \Rightarrow \mu < 1}$

$\cancel{\alpha < 0 \quad 1-\mu < 0 \Rightarrow \mu > 1}$

NO VA

~~De la cuenta anterior se deduce que necesariamente~~ $\cancel{\alpha > 0}$ ~~para que el sistema iterativo converja.~~ ~~Si~~ $\cancel{\alpha > 0 \Rightarrow \mu < 1}$. ~~Buscamos en realidad que~~ $\cancel{|\mu| < 1}$. ~~Es decir, que~~ $\cancel{-1 < \mu < 1}$. ~~Pero~~ $\cancel{\mu < 1}$ ~~ya lo garantizamos.~~

$$\cancel{\mu > -1 \Leftrightarrow -\mu < 1 \Leftrightarrow 1-\mu < 2}$$
$$\cancel{\Leftrightarrow \frac{1-\mu}{\alpha} < 2}$$

Ya vimos que si λ es autovalor de $A \Rightarrow 1-\lambda\alpha$ es autovalor de $I-\alpha A$.

Además, si μ es autovalor de $I-\alpha A$, μ es de la forma $1-\lambda\alpha$ para algún autovalor λ de A, pues ya vimos que $\frac{1-\mu}{\alpha}$ es autovalor de A

$\Rightarrow \frac{1-\mu}{\alpha} = \lambda$ con λ autoval de A

$\Rightarrow 1-\mu = \alpha\lambda \Rightarrow \boxed{\mu = 1-\alpha\lambda}$

Luego, para ver que para cualquier μ autoval de $I-\alpha A$ cumple $|\mu|<1$, basta ver que

$|1-\alpha\lambda|<1 \quad \forall \lambda$ autovalor de A.

$|1-\alpha\lambda|<1 \quad \forall \lambda$ autoval de A

$\Leftrightarrow -1 < 1-\alpha\lambda < 1$ " " ...

$\Leftrightarrow 0 < \alpha\lambda < 2$

$\Leftrightarrow$ ~~...~~ ~~...~~

$\boxed{\lambda > 0}$ por hipótesis.

$\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2/\lambda \quad \forall \lambda$ autoval de A

Entonces el sistema converge $\forall x_0$ inicial

$\Leftrightarrow 0<\alpha < \frac{2}{\lambda} \; \forall \lambda$ autoval de A

$\Leftrightarrow \boxed{0<\alpha<2/\lambda_{max}}$ con λ_{max} el mayor autovalor de A.

B

(3) $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$.

$1 \le k \le n$ $\quad A_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ matriz $\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix}$

$$\varphi(k) = \min_{x \in \mathbb{R}^k} \|A_k x - b\|_2$$

a) Probar que si $1 \le s \le t \le n$

$$\Rightarrow \varphi(s) \ge \varphi(t)$$

Interpretar geométricamente.

Sea $\tilde{x} \in \mathbb{R}^s$ que minimiza $\|A_s x - b\|_2$.

Miremos ahora el vector $y = \begin{pmatrix} | \\ \tilde{x} \\ | \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s+1}$

Entonces:

$$\|A_{s+1} y - b\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} | & & | & | \\ v_1 & \cdots & v_s & v_{s+1} \\ | & & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ 0 \end{pmatrix} - b \right\|_2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_s \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \tilde{x} \\ | \end{pmatrix} - b \right\|_2$$

$$= \|A_s \tilde{x} - b\|_2 \underset{\substack{\text{pues } \tilde{x} \in \mathbb{R}^s \text{ era} \\ \text{minimizante.}}}{=} \varphi(s)$$

Entonces

$$\varphi(s+1) = \min_{x \in \mathbb{R}^{s+1}} \|A_{s+1} x - b\|_2 \underset{\substack{\text{el} \\ \text{mínimo} \\ \text{es} \le \text{que uno} \\ \text{en particular} \\ \text{tomando } x = y}}{\le} \|A_{s+1} y - b\| = \varphi(s).$$

Entonces, obtenemos inductivamente, que si $t \ge s$, $t = s + j$

$$\varphi(t) = \varphi(s+j) \ge \varphi(s+j-1) \ge \varphi(s+j-2) \ge \cdots$$

$$\ge \varphi(s+1) \ge \varphi(s).$$

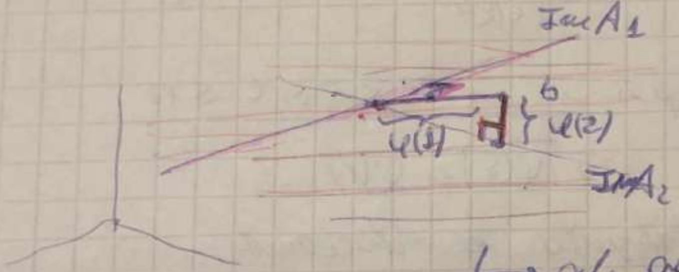
Como queríamos. OK

B

NOTA

Geométricamente podemos pensar que si pensamos encontrar la mínima distancia de b a un subespacio, si agregamos elementos al subespacio, podemos estar acercándonos al elemento b más de lo que consideramos antes.

Por ejemplo:



↳ al agregar elementos al extender la recta Im A_1 al plano Im A_2, podemos llegar a estar más cerca al b. OK

b) Si $n>3$, y $b = v_n$. Encontrar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times 2}$ para la cual la solución de cuadrados mínimos para $Ax=b$ tiene ∞ soluciones y además $\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax-b\|_2 = \varphi(1)$.

Vimos en clase que cuadrados mínimos tiene solución única $\iff \ker A = \{0\}$.
Luego, para que tenga infinitas soluciones, debemos tener A con Ker no trivial $\Rightarrow \exists (\alpha_1,\alpha_2)\neq 0$ tq

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{Si } A = \begin{pmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0$. Si $\alpha_1 \neq 0$ $u_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} u_2$,

Si $\alpha_2 \neq 0$ $u_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} u_1$

En cualquier caso, tenemos que una columna es múltiplo de la otra. Vamos a intentar hallar A con ambas columnas iguales.

Notemos que $\varphi(1) = \min_{x \in \mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2$

Si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \min_{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2} \left\| A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - v_n \right\|_2$$

$$= \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}} \left\| (x_1 + x_2) v_1 - v_n \right\|_2$$

$$= \min_{x \in \mathbb{R}} \left\| x v_1 - v_n \right\|_2 = \varphi(1)$$

y como entonces $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1 & v_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Como $\ker A \neq \{0\} \Rightarrow \ker(A^t A) \neq \{0\} \Rightarrow$ Si x^* es solución de $A^t A x^* = A^t b$ (siempre tiene solución pues es cuadrados mínimos) y si $y \in \ker A^t A$

$\Rightarrow$ $x^* + \mu y$ es solución $\forall \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ hay en efecto ∞ soluciones como queríamos.

B

NOTA

(4) a) f polinomio, $x_0, \dots, x_n$ puntos distintos

$f[x_0 \dots x_n] = 0$.

Sea $p(x)$ el polinomio interpolador para f en esos puntos. Demostrar que si se deja de considerar un punto x_j, $p(x)$ sigue siendo el polinomio interpolador para f en

$x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n$.

Sabemos por diferencias divididas que el polinomio interpolador p se escribe como:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0 x_1](x-x_0) + \dots + f[x_0 \dots x_{n-1}](x-x_0)\dots(x-x_{n-2})$$

$$+ f[x_0 \dots x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

Como $f[x_0 \dots x_n] = 0$, el último término no aparece, y el último es

$$\underbrace{f[x_0 \dots x_{n-1}] \cdot \underbrace{(x-x_0)\dots(x-x_{n-2})}_{n-1 \text{ factores}}}_{\text{grado} \leq n-1}$$

(o bien es 0 si $f[x_0 \dots x_{n-1}] = 0$)

Notar que todos los sumandos que quedan tienen grado $\leq n-1 \Rightarrow \boxed{gr(p) \leq n-1}$

Cuando quitamos algún punto x_j, el polinomio p sigue interpolando a los demás. Como son n puntos, por unicidad del polinomio interpolador de Lagrange, como $gr\, p \leq n-1 \Rightarrow p$ es el polinomio interpolador en los puntos restantes!

(dados n puntos $\exists!$ polinomio interpolante de grado $\leq n-1$)

B

b) $S(x) = \begin{cases} x^3 & -1 \le x \le 0 \\ a + bx + cx^2 + dx^3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Hallar una función f distinta de x^3, y valores para a, b, c, d, de tal forma que S sea un spline sujeto a f.

Para que sea spline cúbico, ambos tramos deben "pegarse" bien hasta orden 2:

$S_0(x) = x^3$

$S_1(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

$0 = S_0(0) = S_1(0) = a \Rightarrow \boxed{a = 0}$

$\begin{cases} S_0'(x) = 3x^2 \\ S_1'(x) = b + 2cx + 3dx^2 \end{cases} \rightsquigarrow \quad S_0'(0) = S_1'(0) \quad \boxed{0 = b}$

$\begin{cases} S_0''(x) = 6x \\ S_1''(x) = 2c + 6dx \end{cases} \longrightarrow \quad S_0''(0) = S_1''(0) \quad \boxed{0 = 2c} \Rightarrow \boxed{c = 0}$

$\Rightarrow \quad S(x) = \begin{cases} x^3 & -1 \le x \le 0 \\ dx^3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

Queremos hallar una f tq

$\begin{cases} f(-1) = S(-1) = (-1)^3 = -1 \\ f(0) = S(0) = 0 \\ f(1) = S(1) = d \end{cases}$

para que sea sujeto $\left[\begin{array}{l} f'(-1) = S'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 \\ f'(1) = S'(1) = \cancel{b + 2c} + 3d = 3d \end{array} \right.$

Si tomamos: $d = 2$ $\quad S(x) = \begin{cases} x^3 & -1 \le x \le 0 \\ 2x^3 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$

~~tomamos~~ podemos tomar $f(x) = S(x)$!

Así $f \neq x^3$, y además el spline es sujeto! ~~[illegible]~~ (las derivadas de S coinciden con las de f en los extremos) pues son la misma función.

Si queremos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podemos tomar $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \le 0 \\ 2x^3 & x \ge 0 \end{cases}$

Observación: f no es C^∞, sólo C^2 solamente $\quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \le 0 \\ 6x^2 & x \ge 0 \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 6x & x \le 0 \\ 12x & x \ge 0 \end{cases}$ ~~pues~~ f'' es continua pero no derivable

B